# 拓扑、代数几何与算法的复杂度

2024年10月25日

兰州大学几何与拓扑讨论班

报告人：陈伟彦（清华大学丘成桐数学科学中心）

论文合作者：万喆彦（北京雁栖湖应用数学研究院）、古星（西湖大学）

# 古典代数几何里的枚举问题(enumerative problems)

# 古典代数几何里的枚举问题(enumerative problems)

- 代数基本定理：n次多项式有n个根

# 古典代数几何里的枚举问题(enumerative problems)

- 代数基本定理：n次多项式有n个根
- 三次曲线有9个拐点(inflection points)

# 古典代数几何里的枚举问题(enumerative problems)

- 代数基本定理：n次多项式有n个根
- 三次曲线有9个拐点(inflection points)
- 四次曲线有24个拐点

# 古典代数几何里的枚举问题(enumerative problems)

- 代数基本定理：n次多项式有n个根
- 三次曲线有9个拐点(inflection points)
- 四次曲线有24个拐点
- 四次曲线有28个双切线(bitangents)

# 古典代数几何里的枚举问题(enumerative problems)

- 代数基本定理：n次多项式有n个根
- 三次曲线有9个拐点(inflection points)
- 四次曲线有24个拐点
- 四次曲线有28个双切线(bitangents)
- Caley-Salmon定理：三次曲面上有27条直线

问： 这些问题的解的复杂度是多少?

问：这些问题的解的复杂度是多少?
答案取决于解的形式

# 问：这些问题的解的复杂度是多少?
# 答案取决于解的形式

- 经典例子：解=根式解　　复杂度由伽罗瓦群测量：如果伽罗瓦群不可解，那么根式解不存在

问：这些问题的解的复杂度是多少?
答案取决于解的形式

- 经典例子：解=根式解　　复杂度由伽罗瓦群测量：如果伽罗瓦群不可解，那么根式解不存在
- 今天考虑：解=算法解　　复杂度由<u>拓扑复杂度</u>（topological complexity）测量：如果拓扑复杂度大，那么简单的算法解不存在。[Smale, 1987]

# 定义

- 算法=有限树
- 算法的拓扑复杂度=分支节点的个数
- 问题P的拓扑复杂度=所有解P的算法的最小拓扑复杂度，记号TC(P)

# 定义

- 算法=有限树
- 算法的拓扑复杂度=分支节点的个数
- 问题P的拓扑复杂度=所有解P的算法的最小拓扑复杂度，记号TC(P)

## 定义

- 算法=有限树
- 算法的拓扑复杂度=分支节点的个数
- 问题P的拓扑复杂度=所有解P的算法的最小拓扑复杂度，记号TC(P)

## 定理

[Smale, 1987]

Root(ε): 寻找n次多项式的根，允许ε>0误差。

对于任意足够小的ε>0，

TC(Root(ε))> (log_2(n))^{2/3}.

## 定义

- 算法=有限树
- 算法的拓扑复杂度=分支节点的个数
- 问题P的拓扑复杂度=所有解P的算法的最小拓扑复杂度，记号TC(P)

## 定理

[Smale, 1987]

Root(ε): 寻找n次多项式的根，允许ε>0误差。

对于任意足够小的ε>0，

TC(Root(ε))> (log_2(n))^{2/3}.

后续改进下界的工作：
Vassiliev 1989,
DeConcini-Procesi-Salvetti 2004,
Arone 2006.

# 枚举问题的拓扑复杂度（topological complexity of enumerative problems）

- 代数基本定理：n次多项式有n个根
- 三次曲线有9个拐点(inflection points)
- 四次曲线有24个拐点
- 四次曲线有28个双切线(bitangents)
- Caley-Salmon定理：三次曲面上有27条直线

# 枚举问题的拓扑复杂度（topological complexity of enumerative problems）

- 代数基本定理：n次多项式有n个根 [Smale]
- 三次曲线有9个拐点(inflection points)
- 四次曲线有24个拐点
- 四次曲线有28个双切线(bitangents)
- Caley-Salmon定理：三次曲面上有27条直线

# 枚举问题的拓扑复杂度（topological complexity of enumerative problems）

- 代数基本定理：n次多项式有n个根
- 三次曲线有9个拐点(inflection points)
- 四次曲线有24个拐点
- 四次曲线有28个双切线(bitangents)
- Caley-Salmon定理：三次曲面上有27条直线

# 枚举问题的拓扑复杂度（topological complexity of enumerative problems）

- 代数基本定理：n次多项式有n个根
- 三次曲线有9个拐点(inflection points)
- 四次曲线有24个拐点
- 四次曲线有28个双切线(bitangents)
- Caley-Salmon定理：三次曲面上有27条直线

定义：

- 算法=有限树
- 算法的拓扑复杂度=分支节点的个数
- 问题P的拓扑复杂度=所有解P的算法的最小拓扑复杂度，记号TC(P)

# 枚举问题的拓扑复杂度（topological complexity of enumerative problems）

- 代数基本定理：n次多项式有n个根
- 三次曲线有9个拐点(inflection points)
- 四次曲线有24个拐点
- 四次曲线有28个双切线(bitangents)
- Caley-Salmon定理：三次曲面上有27条直线

**定理1** [陈-万喆彦, 2023]

CubicFlex(ε): 寻找三次曲线的9个拐点，允许ε>0误差。

当ε足够小，TC(CubicFlex(ε)) ≥ 7。

定义：

- 算法=有限树
- 算法的拓扑复杂度=分支节点的个数
- 问题P的拓扑复杂度=所有解P的算法的最小拓扑复杂度，记号TC(P)

# 枚举问题的拓扑复杂度（topological complexity of enumerative problems）

- 代数基本定理：n次多项式有n个根
- 三次曲线有9个拐点(inflection points)
- 四次曲线有24个拐点
- 四次曲线有28个双切线(bitangents)
- Caley-Salmon定理：三次曲面上有27条直线

定义：

- 算法=有限树
- 算法的拓扑复杂度=分支节点的个数
- 问题P的拓扑复杂度=所有解P的算法的最小拓扑复杂度，记号TC(P)

# 枚举问题的拓扑复杂度（topological complexity of enumerative problems）

- 代数基本定理：n次多项式有n个根
- 三次曲线有9个拐点(inflection points)
- 四次曲线有24个拐点
- 四次曲线有28个双切线(bitangents)
- Caley-Salmon定理：三次曲面上有27条直线

定义：

- 算法=有限树
- 算法的拓扑复杂度=分支节点的个数
- 问题P的拓扑复杂度=所有解P的算法的最小拓扑复杂度，记号TC(P)

**定理2** [陈-古星, 2024]

QuarticFlex(ε): 寻找四次曲线上的24个拐点，允许ε>0误差。

QuarticBitangent(ε): 寻找四次曲线上的28条双切线，允许ε误差。

CubicSurfaceLine(ε): 寻找三次曲面上的27条直线，允许ε误差。

当ε足够小，$\mathrm{TC}(\mathrm{QuarticFlex}(\varepsilon)) \geq 8$

$\mathrm{TC}(\mathrm{QuarticBitangent}(\varepsilon)) \geq 8$

$\mathrm{TC}(\mathrm{CubicSurfaceLine}(\varepsilon)) \geq 15.$

# 枚举问题的拓扑复杂度（topological complexity of enumerative problems）

- 代数基本定理：n次多项式有n个根
- 三次曲线有9个拐点(inflection points)
- 四次曲线有24个拐点
- 四次曲线有28个双切线(bitangents)
- Caley-Salmon定理：三次曲面上有27条直线

定义：

- 算法=有限树
- 算法的拓扑复杂度=分支节点的个数
- 问题P的拓扑复杂度=所有解P的算法的最小拓扑复杂度，记号TC(P)

**定理2** [陈-古星, 2024]

QuarticFlex(ε): 寻找四次曲线上的24个拐点，允许ε>0误差。

QuarticBitangent(ε): 寻找四次曲线上的28条双切线，允许ε误差。

CubicSurfaceLine(ε): 寻找三次曲面上的27条直线，允许ε误差。

当ε足够小，TC(QuarticFlex(ε)) ≥ 8

TC(QuarticBitangent(ε)) ≥ 8

TC(CubicSurfaceLine(ε)) ≥ 15.

枚举问题不存在简单的算法解！

问：如何证明算法不存在？

问：如何证明算法不存在？
答：拓扑

$X = \{p \mid$ 待解决的问题$\}$

$Y = \{(p,s) \mid s$是问题$p$的一个解$\}$

X = {p | 待解决的问题}

Y = {(p,s) | s是问题p的一个解}

Y –> X 是一个n重覆叠映射

X = {p | 待解决的问题}

Y = {(p,s) | s是问题p的一个解}

Y –> X 是一个n重覆叠映射

定义：用开集覆盖X使得覆叠 Y –> X在每一个开集上都有一个连续截面（continuous section）。那么满足这个要求的最小的开集的数量为覆叠 Y –> X的覆叠数（covering number or Schwarz genus）。记号g(Y/X).

X = {p | 待解决的问题}

Y = {(p,s) | s是问题p的一个解}

Y –> X 是一个n重覆叠映射

定义：用开集覆盖X使得覆叠 Y –> X在每一个开集上都有一个连续截面（continuous section）。那么满足这个要求的最小的开集的数量为覆叠 Y –> X的覆叠数（covering number or Schwarz genus）。记号g(Y/X).

定理（Smale principle）$1+TC(X) \geq g(Y/X)$.

X = {p | 待解决的问题}

Y = {(p,s) | s是问题p的一个解}

Y –> X 是一个n重覆叠映射

定义：用开集覆盖X使得覆叠 Y –> X在每一个开集上都有一个连续截面（continuous section）。那么满足这个要求的最小的开集的数量为覆叠 Y –> X的<u>覆叠数</u>（covering number or Schwarz genus）。记号g(Y/X).

定理（Smale principle）1+TC(X) ≥ g(Y/X).

X = {p | 待解决的问题}

Y = {(p,s) | s是问题p的一个解}

Y –> X 是一个n重覆叠映射

定义：用开集覆盖X使得覆叠 Y –> X在每一个开集上都有一个连续截面（continuous section）。那么满足这个要求的最小的开集的数量为覆叠 Y –> X的覆叠数（covering number or Schwarz genus）。记号g(Y/X).

定理（Smale principle）1+TC(X) ≥ g(Y/X).

**定理1** [陈-万喆彦, 2023]

CubicFlex(ε): 寻找三次曲线的9个拐点，允许ε>0误差。

当ε足够小，TC(CubicFlex(ε)) ≥ 7。

X = {p | 待解决的问题}

Y = {(p,s) | s是问题p的一个解}

Y –> X 是一个n重覆叠映射

定义：用开集覆盖X使得覆叠 Y –> X在每一个开集上都有一个连续截面（continuous section）。那么满足这个要求的最小的开集的数量为覆叠 Y –> X的覆叠数（covering number or Schwarz genus）。记号g(Y/X).

定理（Smale principle）1+TC(X) ≥ g(Y/X).

**定理1** [陈-万喆彦, 2023]

CubicFlex(ε): 寻找三次曲线的9个拐点，允许ε>0误差。

当ε足够小，TC(CubicFlex(ε)) ≥ 7。

**引理1** [陈-万喆彦, 2023]

令X={光滑三次曲线C},

Y={(C,p) | p为C上的一个拐点},

那么g(Y/X)≥ 8.

$X = \{p \mid \text{待解决的问题}\}$

$Y = \{(p,s) \mid s\text{是问题}p\text{的一个解}\}$

Y –> X 是一个n重覆叠映射

定义：用开集覆盖X使得覆叠 Y –> X在每一个开集上都有一个连续截面（continuous section）。那么满足这个要求的最小的开集的数量为覆叠 Y –> X的覆叠数（covering number or Schwarz genus）。记号g(Y/X).

定理（Smale principle）$1+TC(X) \geq g(Y/X)$.

**定理2** [陈-古星, 2024]

QuarticFlex(ε): 寻找四次曲线上的24个拐点，允许ε>0误差。

QuarticBitangent(ε): 寻找四次曲线上的28条双切线，允许ε误差。

CubicSurfaceLine(ε): 寻找三次曲面上的27条直线，允许ε误差。

当ε足够小，TC(QuarticFlex(ε)) ≥ 8

TC(QuarticBitangnet(ε)) ≥ 8

TC(CubicSurfaceLine(ε)) ≥ 15.

$X = \{p \mid$ 待解决的问题$\}$

$Y = \{(p,s) \mid$ s是问题p的一个解$\}$

$Y \to X$ 是一个n重覆叠映射

定义：用开集覆盖X使得覆叠 $Y \to X$在每一个开集上都有一个连续截面（continuous section）。那么满足这个要求的最小的开集的数量为覆叠 $Y \to X$的覆叠数（covering number or Schwarz genus）。记号g(Y/X).

定理（Smale principle）$1+TC(X) \geq g(Y/X)$.

**定理2** [陈-古星, 2024]

QuarticFlex(ε): 寻找四次曲线上的24个拐点，允许ε>0误差。

QuarticBitangent(ε): 寻找四次曲线上的28条双切线，允许ε误差。

CubicSurfaceLine(ε): 寻找三次曲面上的27条直线，允许ε误差。

当ε足够小，$TC(\text{QuarticFlex}(\varepsilon)) \geq 8$

$TC(\text{QuarticBitangnet}(\varepsilon)) \geq 8$

$TC(\text{CubicSurfaceLine}(\varepsilon)) \geq 15.$

**引理2** [陈-古星, 2024]

对于问题QuarticFlex，有$g(Y/X) \geq 9$

对于问题QuarticBitangent，有$g(Y/X) \geq 9$

对于问题CubicSurfaceLine，有$g(Y/X) \geq 16.$

问：如何计算覆叠数？

问：如何计算覆叠数？
答：上同调

定义：用开集覆盖X使得覆叠 Y –> X在每一个开集上都有一个连续截面（continuous section）。那么满足这个要求的最小的开集的数量为覆叠 Y –> X的覆叠数。记号g(Y/X).

定义：用开集覆盖X使得覆叠 Y –> X在每一个开集上都有一个连续截面（continuous section）。那么满足这个要求的最小的开集的数量为覆叠 Y –> X的覆叠数。记号g(Y/X).

定理A[Schwarz, 1966]：令Y –> X为覆盖。那么k ≥ g(Y/X) 当且仅当纤维丛Y_k –> X有连续截面。

定义：用开集覆盖X使得覆叠 Y –> X在每一个开集上都有一个连续截面（continuous section）。那么满足这个要求的最小的开集的数量为覆叠 Y –> X的覆叠数。记号g(Y/X).

定理A[Schwarz, 1966]：令Y –> X为覆盖。那么k ≥ g(Y/X) 当且仅当纤维丛Y_k –> X有连续截面。

定理B[Schwarz, 1966]：令Y –> X为正规覆盖，且对称群为G。令 cl: X –> BG 为其分类映射，

那么

**引理1** [陈-万喆彦, 2023]

令X={光滑三次曲线C}，Y={(C,p) | p为C上的一个拐点}，那么$g(Y/X)\geq 8$.

**证明思路：**

**引理1** [陈-万喆彦, 2023]

令X={光滑三次曲线C}，Y={(C,p) | p为C上的一个拐点}，那么$g(Y/X) \geq 8$.

**证明思路：**

谢谢！

# 参考文献


- 陈伟彦、万喆彦，Topological complexity of finding flex points on cubic plane curves, arXiv 2306.17303.
- 陈伟彦、古星，Topological complexity of enumerative problems and classifying spaces of PUn, 即将登陆arXiv.
- Leary, The mod-p cohomology rings of some p-groups, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 112(1):63-75, 1992.
- Schwarz, The genus of a fiber space, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 2, 1966.
- Smale, On the topology of algorithms I. *Journal of Complexity*, 3(2):81-89, 1987.